

TOPOGRAFÍA POR SATÉLITE GLOBAL POSITIONING SYSTEM (GPS)

**Geodesia Geométrica, Geodesia Física y Geodesia Espacial
Objetivo y Aplicaciones**



CURSOS DE ENSEÑANZAS PROPIAS. UNIVERSIDAD DE ALMERÍA

ÍNDICE

<u>CONTENIDO</u>	<u>PÁG.</u>
Definición, división y objetivo de la Geodesia	
1. ¿Qué es la Geodesia?	3
2. Problemas de la Geodesia	3
3. División de la Geodesia	4
4. La red geodésica española. Datos históricos y técnicos	5
BIBLIOGRAFÍA	7
Geodesia Geométrica. Aplicaciones	
5. Resolución de pequeños triángulos	8
6. Determinación de distancias	12
7. Determinación de ángulos	14
BIBLIOGRAFÍA	15
Geodesia Física. Aplicaciones	
8. Relación entre los observables físicos y la Geodesia	16
9. El campo de gravedad terrestre. Superficies de nivel. El geoide	17
10. Ondulación del geoide y desviación de la vertical	21
11. Ondulación del geoide y alturas ortométricas. Método GPS-Nivelación	24
BIBLIOGRAFÍA	28
Geodesia Espacial. Aplicaciones	
12. Geodesia espacial y cálculo gravimétrico del geoide	29
13. Procedimiento operacional para el cálculo gravimétrico del geoide	30
.....	
14. Componentes de la desviación de la vertical	32
BIBLIOGRAFÍA	32
Bibliografía	
BIBLIOGRAFÍA	34

Definición, división y objetivo de la Geodesia

1. ¿Qué es la Geodesia?

La palabra Geodesia literalmente expresa *división de la Tierra*, sin embargo, diversos autores notables establecen distintas definiciones de este concepto. Para unos existe una clara diferencia entre la Geodesia Teórica y la Geodesia Práctica, indicando que la primera *estudia la forma y dimensiones de la Tierra*, en cambio la segunda *establece los procedimientos para la medida de porciones terrestres*. Para otros autores esta diferencia no es tan clara, por ello se refieren a la Geodesia como una ciencia cuyo objetivo es el de *proporcionar un armazón o estructura geométrica precisa para el apoyo de los levantamientos topográficos*.

Actualmente la Geodesia se define brevemente como *la ciencia que resuelve los problemas relacionados con la figura y dimensiones de la Tierra*, y como veremos más adelante esta ciencia puede dividirse en varias disciplinas, atendiendo al método seguido para llevar a cabo este objetivo.

Podemos concluir este apartado diciendo que la Geodesia es una ciencia, que desde la antigüedad, se ha dedicado al estudio de la medida y forma del globo terráqueo, adaptándose a las necesidades de la época para aplicarse a problemas prácticos, como son básicamente la confección de mapas nacionales e internacionales, así como la preparación de cartas para aplicaciones específicas como las geológicas e hidrográficas, entre otras. Pudiendo afirmar que la Geodesia se ha necesitado y seguirá siendo necesaria mientras se proyecten obras humanas que requieran precisiones cada vez mayores.

2. Problemas de la Geodesia

Sabiendo que la principal tarea científica de la Geodesia es el estudio de la figura de la Tierra, podemos dividir los problemas *científicos* de la Geodesia en :

- Determinación del tipo de superficie matemática que represente suficientemente bien la figura de la Tierra en su totalidad. A este respecto se considera como tal superficie la de un elipsoide de revolución ligeramente aplanado, éste se denomina *elipsoide terrestre*.
- El estudio de la verdadera figura de la Tierra y su campo de gravedad, entendiendo por verdadera figura de la Tierra, la superficie física de la misma. El estudio de la verdadera figura de la Tierra consiste en determinar las magnitudes geodésicas, que caracterizan las desviaciones de ésta con respecto a la superficie establecida por el elipsoide terrestre. El estudio del campo de gravedad terrestre es fundamental, debido tanto a su influencia en la forma de la Tierra, como a la influencia que ejerce en las medidas que se llevan a cabo de la misma (por ejemplo mediante satélites artificiales).

Los problemas *científico-técnicos* derivados de los anteriores son múltiples, aquí citaremos sólo los más relevantes.

- Medición de la aceleración de la gravedad.

- Determinaciones astronómicas de las latitudes y longitudes terrestres.
- Observaciones de los satélites artificiales.
- Elaboración de modernos métodos e instrumentos para la ejecución de mediciones y observaciones de alta precisión.
- Desarrollo de métodos topográficos con los que se estudia detalladamente la forma de la superficie terrestre.
- Levantamiento cartográfico de grandes territorios, es decir, representación de la superficie terrestre sobre un plano.

Interpretados a grandes rasgos, los problemas científicos y científico-técnicos de la Geodesia, están recíprocamente enlazados, y por eso, la solución de los problemas científico-técnicos exige el control de requisitos deducidos de la solución de los problemas científicos. En el apartado siguiente veremos como la búsqueda de soluciones a los problemas fundamentales de la Geodesia, conduce a una división de la misma en tres ramas principales.

3. División de la Geodesia

De la definición de la Geodesia dada anteriormente, parece deducirse que la misma se dedica sólo a la solución de problemas de tipo geométrico, pero no debemos olvidar que para llegar a definir la forma de la Tierra, será preciso considerar a nuestro planeta en un contexto más general.

En efecto, dentro del marco de la Mecánica Clásica, la Tierra es un cuerpo inmerso en el sistema solar, que se encuentra sometido a una rotación diaria y a la atracción del Sol y de los demás cuerpos del sistema solar. En estas condiciones la Tierra describe una órbita que compensa en cierto modo tales atracciones, por ello, podemos considerar que un punto sobre la superficie terrestre queda sometido, casi exclusivamente, a la atracción de nuestro planeta y a la fuerza centrífuga derivada de su rotación. Así pues, idealizado el problema y prescindiendo del movimiento orbital terrestre, vemos que tiene sentido estudiar las figuras de equilibrio que adoptará una masa aislada, cuyas partículas se atraen según la ley de gravitación universal de Newton.

En esta situación de aislamiento, sucede que la esfera es una figura de equilibrio para una masa homogénea en reposo, siendo el único movimiento posible para una masa homogénea que se mueve como un sólido, el de una rotación uniforme alrededor de uno de sus ejes principales de inercia. Ambas conclusiones, unidas al hecho de que una pequeña rotación produce un achatamiento de la forma esférica, nos lleva a considerar que la Tierra tiene una figura de equilibrio dada por un elipsoide de revolución, ligeramente achatado en los polos, que gira alrededor de un eje que pasa aproximadamente por los polos. Conviene sin embargo recordar, que la Tierra no es un cuerpo rígido y homogéneo, por tanto este modelo teórico está muy simplificado. Otra simplificación importante que se ha indicado consiste en ignorar los efectos gravitatorios de los demás cuerpos del sistema solar, incluido el Sol, sobre la superficie terrestre. Es un fenómeno bien conocido la existencia de mareas tanto oceánicas como terrestres y atmosféricas, todas éstas son debidas a la atracción gravitatoria que ejercen

sobre la superficie terrestre, principalmente el Sol por su gran masa y la Luna por su cercanía a la Tierra.

No obstante, en lo sucesivo vamos a considerar la superficie de equilibrio o equipotencial, la que determinan los océanos, prescindiendo del efecto perturbador de las mareas. Denominaremos entonces *geoide* a la superficie dada por el nivel medio de los océanos, siendo esta superficie la que utilizaremos como referencia para definir la altitud de un punto sobre la Tierra. Sin duda, la introducción del geoide como superficie de nivel tiene un gran sentido físico, aunque su determinación resulte ser uno de los problemas más complejos de la Geodesia.

Nos encontramos así con dos superficies fundamentales de referencia, el elipsoide y el geoide, las cuales provienen de dos concepciones distintas de la Geodesia, determinando en consecuencia la división de la Geodesia en dos ramas principales, Geodesia Geométrica o Elipsoidal y Geodesia Física o Dinámica.

Además de estas ramas y debido al desarrollo de la interferometría láser, las nuevas técnicas de radar y el lanzamiento de satélites artificiales, las cuales hacen posible determinar la posición de un punto sobre la Tierra, de forma independiente de cualquier modelo previo adoptado; nace una nueva rama de la Geodesia que incluye procedimientos de medida tan diversos, ésta se llama Geodesia Espacial o Geodesia por satélite.

Finalmente señalaremos, que atendiendo a su aspecto más operativo o práctico, la Geodesia puede dividirse en tres categorías :

- La *Geodesia Global*, que responde a la definición general citada al principio de este capítulo, y que necesita para su desarrollo la cooperación internacional.
- La *Geodesia Regional*, que es practicada por cada país con el fin de resolver los problemas planteados por la Cartografía y la Geografía, entre otras.
- La *Geodesia Topográfica*, que trata de precisar detalles de una cierta superficie de pequeñas dimensiones, para ello la considera una superficie plana o esférica según sean sus dimensiones.

4. La red geodésica española. Datos históricos y técnicos

Llegados a este punto, hay que recordar que desde la antigüedad el hombre se ha preocupado por la medida de la Tierra, pero es Aristóteles el primer autor que nos habla de la medida de la misma, indicando que los matemáticos de la época fijaron el perímetro de ésta en 400 000 estadios, siendo un estadio aproximadamente 166 m.

Sin embargo, es Eratóstenes el primer geómetra cuyo procedimiento de medida es conocido; su método, el cual es utilizado todavía en nuestra era, consiste en la medida lineal y angular de un arco terrestre; la medida lineal se realizaba de forma directa, a pasos, la medida angular se llevaba a cabo mediante métodos celestes. El procedimiento que este geodesa llevó a cabo 2 siglos a. C. es como sigue. Primero observó el día del año en que el Sol estaba en la vertical de la ciudad de Siene (actual Assuán). Al año siguiente el mismo día y a la misma hora observó la inclinación del Sol en Alejandría, obteniendo tal como indica la figura

adjunta el valor 1/50 parte de un círculo ($7^{\circ} 12'$). Entonces, dado que la distancia entre Alejandría

y Siene era bien conocida en la época (5.000 estadios), pudo hallar el radio medio de la Tierra y el perímetro aproximado de la Tierra unos 252.000 estadios (1 estadio de esa época era aproximadamente 160 m actuales).

Esta forma de medir arcos y distancias de forma más bien directa se utilizó hasta el año 1620, fecha en la que el abate Picard, nacido en Francia, mide un arco de meridiano, por medio de una triangulación compuesta de 13 triángulos. Las latitudes extremas se determinaron empleando círculos graduados de tres metros de radio, junto con observaciones astronómicas.

Durante siglos Francia mantuvo su primacía en asuntos geodésicos, pero desde principios del siglo XIX es Alemania el país que da a la Geodesia un empuje formidable, siendo Estados Unidos, durante el siglo XX, el país en el que se llevan a cabo los trabajos geodésicos de más relevancia. Las medidas francesas de los siglos XVII y XVIII sirvieron para calcular los elipsoides de Bessel y de Clarke, mientras que las medidas Norteamericanas se utilizaron para calcular el elipsoide de Hayford.

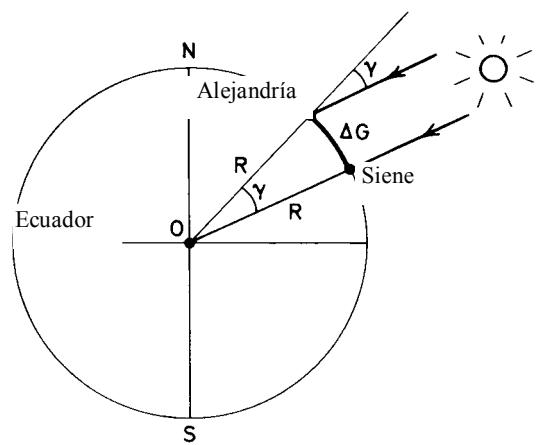


Fig. 1. Método usado por Eratóstenes para medir el perímetro de la Tierra.

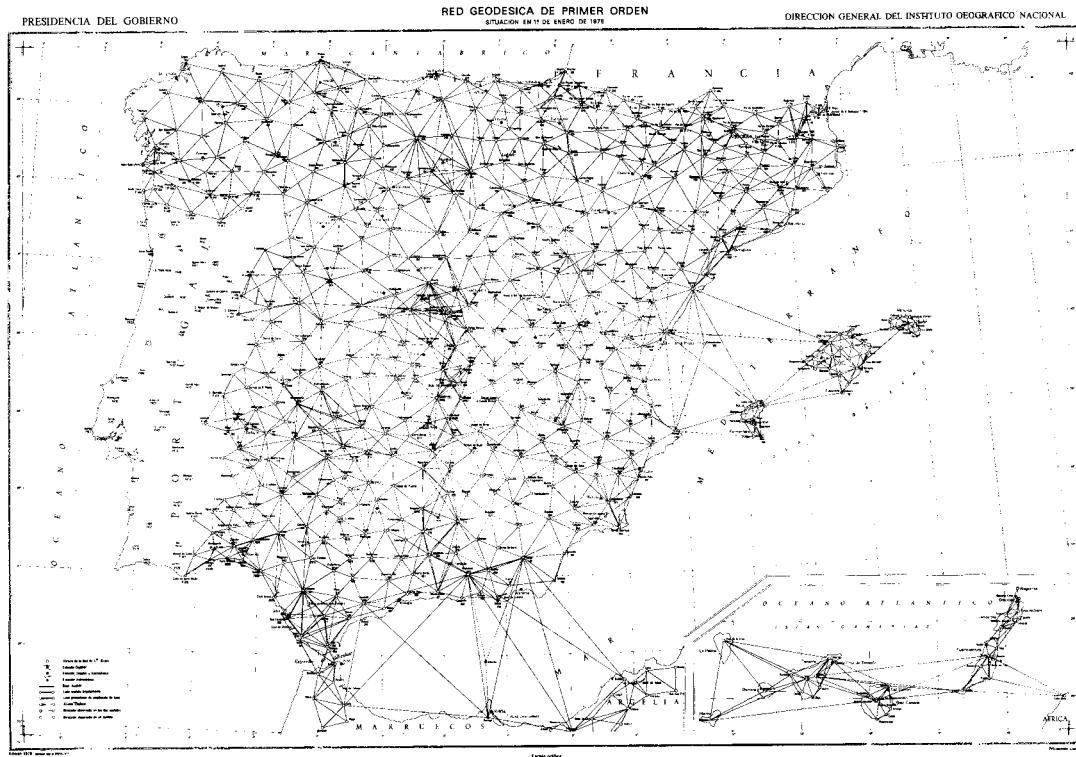


Fig. 2. Mapa de la Red Geodésica Nacional.

En la actualidad, en nuestro país se extiende una red geodésica formada por cadenas de triángulos, los cuales corren sensiblemente a lo largo de los meridianos, paralelos y costas. Forman parte de esta red las cadenas de enlace del Archipiélago Balear con la Península, así como los grandes cuadriláteros que ligan nuestra costa con Argelia y Marruecos. El Archipiélago Canario posee su red propia que liga las islas entre sí, y éstas con el continente africano. Los trabajos geodésicos cuyo objetivo fue la formación del mapa nacional en escala 1:50.000, se iniciaron en 1858 finalizándose en su conjunto hacia 1930. El punto fundamental de nuestra red o *dátum* está en el Observatorio Astronómico de Madrid, cuyo meridiano ha sido utilizado también como origen de longitudes, sin embargo, la red geodésica de las Canarias por ser independiente tiene su propio *dátum*, el cual se halla en el vértice denominado Pico de las Nieves, en la isla de Gran Canaria.

BIBLIOGRAFÍA

Bomford G. (1971). *Geodesy*. Oxford University Press.

Cid R. y Ferrer S. (1997). *Geodesia Geométrica, Física y por Satélites*. Instituto Geográfico Nacional. Ministerio de Fomento.

Martín Asín F. (1983). *Geodesia y Cartografía Matemática*. Instituto Geográfico Nacional.

Torge W. (1991). *Geodesy, 2nd Edition*. Walter de Gruyter.

Vanicek P. and Krakiwsky E. (1986). *Geodesy : The Concepts*. Elsevier Science Publishers.

Geodesia Geométrica. Aplicaciones

5. Resolución de pequeños triángulos

En las campañas geodésicas, como las mencionadas anteriormente, se suelen determinar los ángulos sobre la superficie terrestre, tras lo cual el problema consiste en calcular las longitudes de los lados, para cada triángulo de la red. Según este procedimiento, si conocemos un lado de la triangulación y determinamos todos los ángulos existentes en dicha red, es posible hallar las dimensiones de la red completa (ver figura 1(a)). Por otra parte, la triangulación es también necesaria en muchos casos, para pasar de una base medida a una base mayor o ampliada, debido a las dificultades que puede presentar el terreno, para efectuar medidas de distancias sobre el mismo, medidas que serían necesarias para determinar la base ampliada directamente (ver figura 1(b)).

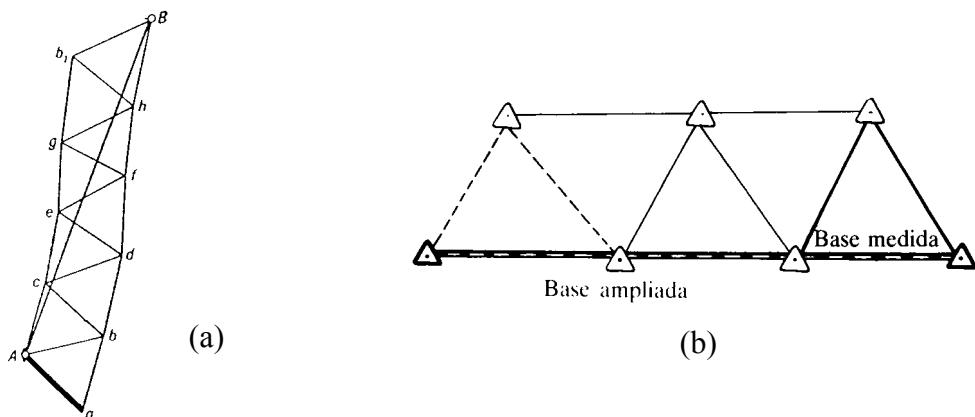


Fig. 1. (a) Red geodésica entre dos puntos A y B. (b) Red geodésica de ampliación de base.

En consecuencia, es necesario llevar a cabo algún procedimiento que nos permita resolver los triángulos planteados en una red geodésica. Para ello, existen diversos métodos de los cuales vamos a comentar los más relevantes, como son el *método de Legendre* y el *método de los aditamentos*. Comenzando por el primero, hay que decir que su nombre proviene del teorema que se aplica, teorema de Legendre, este teorema permite asociar a cada triángulo geodésico como el mostrado en la figura 2(a), un triángulo plano como el mostrado en la figura 2(b), de tal forma que las distancias (a,b,c) en ambos triángulos son las mismas.

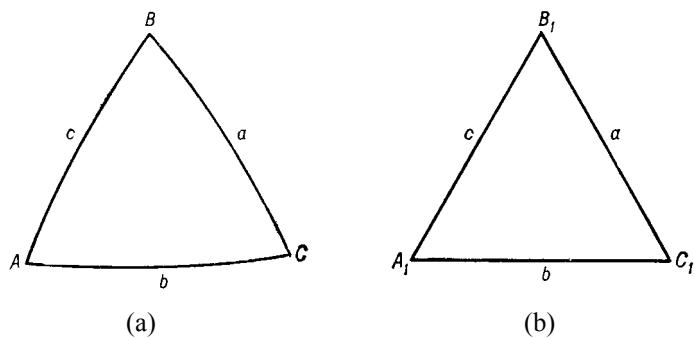


Fig. 2. (a) Triángulo geodésico. (b) Triángulo plano asociado al anterior.

En consecuencia, nos planteamos el problema de calcular la diferencia que existe entre los ángulos (A, B, C) del triángulo geodésico, y los ángulos del triángulo plano asociado (A_1, B_1, C_1), porque si conocemos estas diferencias, podemos establecer una relación entre ambos triángulos, de tal forma, que es posible aplicar las conocidas y sencillas fórmulas de trigonometría plana, a los triángulos geodésicos de la red considerada.

Por otra parte, hay que tener en cuenta que los triángulos de una red geodésica, poseen unos lados cuyas longitudes rara vez superan los 100 km, en este caso podemos considerar los triángulos geodésicos como triángulos esféricos, para los cuales es válida la *ley de los cosenos*. Aplicando esta ley al triángulo de la figura 2(a) tenemos

$$\cos \frac{a}{R} = \cos \frac{b}{R} \cos \frac{c}{R} + \sin \frac{b}{R} \sin \frac{c}{R} \cos A$$

donde R es el radio de la esfera sobre la que se construye el triángulo esférico. Despejando en la fórmula anterior $\cos A$, podemos escribir

$$\cos A = \frac{\cos \frac{a}{R} - \cos \frac{b}{R} \cos \frac{c}{R}}{\sin \frac{b}{R} \sin \frac{c}{R}}$$

si aplicamos ahora el desarrollo en serie de Taylor de las funciones trigonométricas, que aparecen en esta expresión, se tiene

$$\cos A = \frac{1 - \frac{a^2}{2R^2} + \frac{a^4}{24R^4} - \left(1 - \frac{b^2}{2R^2} + \frac{b^4}{24R^4}\right)\left(1 - \frac{c^2}{2R^2} + \frac{c^4}{24R^4}\right)}{\left(\frac{b}{R} - \frac{b^3}{6R^3}\right)\left(\frac{c}{R} - \frac{c^3}{6R^3}\right)}$$

habiendo despreciado los términos de quinto grado y superiores, en las cantidades $\frac{a}{R}$, $\frac{b}{R}$ y $\frac{c}{R}$. Así, después de multiplicar y agrupar términos obtendremos

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2c^2b^2}{24R^2bc}$$

Ahora bien, para el triángulo plano de la figura 2(b), aplicando la *ley de los cosenos*, podemos escribir

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A_1$$

de donde

$$\cos A_1 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\sin^2 A_1 = 1 - \cos^2 A_1 = \frac{-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2c^2b^2}{4b^2c^2}$$

Entonces, combinando las expresiones obtenidas, con la fórmula anteriormente escrita para el $\cos A$, deducimos que

$$\cos A = \cos A_1 - \frac{bc \sin^2 A_1}{6R^2}$$

y sabiendo que

$$\cos A - \cos A_1 = -2 \sin \frac{A - A_1}{2} \sin \frac{A + A_1}{2}$$

dado que la cantidad $A - A_1$ es muy pequeña comparada con A , podemos escribir dentro de la precisión aceptada

$$\cos A - \cos A_1 = -2 \frac{A - A_1}{2} \sin \frac{2A_1}{2} = -(A - A_1) \sin A_1 = -\frac{bc \sin^2 A_1}{6R^2}$$

concretamente, la diferencia de ángulos buscada $A - A_1$ podrá escribirse como

$$A - A_1 = \frac{bc \sin A_1}{6R^2} = (\text{área del triángulo plano})/3R^2$$

recordando que el exceso esférico ϵ de un triángulo esférico, es precisamente el área del triángulo dividida por R^2 , notamos que la corrección a considerar es la tercera parte del exceso esférico. Análogamente, para los demás ángulos podremos escribir expresiones similares, de tal forma que la corrección buscada para los ángulos del triángulo de la figura 2(a), determinados sobre el terreno, será en cada caso restar un tercio del exceso esférico, que como sabemos puede calcularse mediante

$$\epsilon = A + B + C - 180^\circ$$

En consecuencia, las ecuaciones

$$A_1 - A = -\frac{\epsilon}{3} \quad B_1 - B = -\frac{\epsilon}{3} \quad C_1 - C = -\frac{\epsilon}{3}$$

expresan el contenido del teorema de Legendre, para pequeños triángulos geodésicos (cuyos lados no sobrepasen los 100 km).

No obstante, debemos notar que las ecuaciones anteriores, permiten resolver triángulos geodésicos, es decir, calcular todas los lados de los triángulos geodésicos que forman una red, aplicando correcciones a los ángulos determinados sobre el terreno. Esta es una forma válida de operar, pero también es posible aplicar correcciones a los lados, de tal forma que el resultado sea, directamente, las distancias buscadas, es decir, los lados del triángulo geodésico. Este método operacional, recibe el nombre de *método de los aditamentos*, siendo el objetivo final del mismo, determinar las correcciones o aditamentos, que es necesario aplicar a los lados de un triángulo, cuyos ángulos sean los determinados sobre el terreno (A, B, C), con el objeto de convertirlo en un triángulo plano, al que podemos aplicar la trigonometría plana para determinar sus lados.

Para desarrollar el método de los aditamentos partimos de la *ley de los senos*

$$\frac{\sin \frac{b}{R}}{R} = \sin\left(\frac{a}{R}\right) \frac{\sin B}{\sin A}$$

donde aplicamos, como hicimos antes, los desarrollos en serie de las funciones trigonométricas, considerando despreciables los términos de grado cuarto y superiores, en las cantidades $\frac{a}{R}$ y $\frac{b}{R}$, teniendo en consecuencia

$$\left(\frac{1}{R}\right)\left(b - \frac{b^3}{6R^2}\right) = \left(\frac{1}{R}\right)\left(a - \frac{a^3}{6R^2}\right) \frac{\sin B}{\sin A}$$

si designamos

$$a - \frac{a^3}{6R^2} = a - A_a = a' \quad b - \frac{b^3}{6R^2} = b - A_b = b'$$

podemos escribir

$$b' = a' \frac{\sin B}{\sin A}$$

análogamente para el lado c , tendremos

$$c' = a' \frac{\sin C}{\sin A}$$

De esta forma, introducimos una cantidad A_s (donde s designa el lado considerado), llamada *aditamento* del lado s . Notando que las expresiones anteriores nos permiten escribir ahora

$$\frac{a'}{\sin A} = \frac{b'}{\sin B} = \frac{c'}{\sin C}$$

Estas expresiones constituyen la conocida *ley de los senos*, de la trigonometría plana; llevando nuestro problema, como consecuencia de ello, a la resolución de un triángulo plano.

Para llevar a cabo la resolución de una red de triángulos, siguiendo el método de los aditamientos, operamos como sigue :

1. Conocido un lado del mismo, por ejemplo el lado a , obtenemos

$$a' = a - A_a$$

ya que, el aditamento A_a se puede obtener conocidos a y R .

2. Con el valor hallado a' se calculan b' y c' , empleando para ello la ley de los senos.

3. Obteniéndose a continuación los aditamientos A_b y A_c . Para ello, introducimos en la expresión de los mismos, los valores b' y c' , considerando que

$$b'^3 \cong b^3 \quad c'^3 \cong c^3$$

debido a que la diferencia $b' - b$ es muy pequeña frente a b .

4. Con los valores de los aditamientos obtenidos, podemos escribir finalmente los valores de los lados buscados (b, c), en la forma

$$b = b' + A_b \quad c = c' + A_b$$

6. Determinación de distancias

En cualquier campaña de triangulación, como las mencionadas anteriormente, se suelen medir bases sobre el terreno, siguiendo para ello, un método que consiste en medir con precisión una pequeña distancia, y a continuación, mediante una red de ampliación de base, se obtiene la distancia entre los dos vértices correspondientes. Este procedimiento fue mencionado en el apartado anterior, como una aplicación básica de la geodesia geométrica. Llegados a este punto es conveniente especificar cómo es posible hallar una distancia sobre la superficie de la Tierra, considerada en este caso como la superficie del elipsoide de referencia utilizado durante esa campaña.

En primer lugar, hay que decir que la forma de llevar a cabo las medidas directas que conlleva el cálculo de una base, ha cambiado mucho desde la antigüedad hasta nuestros días. Esta evolución es continua, y por tanto, sigue sucediendo en actualmente, de tal forma que los métodos a seguir estarán siempre sujetos a una continua revisión, para incorporar los recientes avances habidos en este tema.

Para ser conscientes de esta evolución, basta recordar que la medida de bases con precisión no fue realizada hasta el siglo XIX, fecha en la que se comenzaron a utilizar las reglas bimetálicas, que fueron inventadas por Borda en 1792. El método que se utilizaba con estas reglas, consistía en colocar cada regla, una y otra vez, a continuación de la otra; de esta forma, podían medirse distancias de 10 km, como mucho, con una precisión de 10^{-6} . El problema de este método está en lo laborioso del mismo y en la necesidad de conocer con precisión la longitud de la regla empleada. Con respecto a esto último, la precisión con la que se conoce la longitud de la regla empleada, y cómo cambia esta longitud durante el proceso de medida de bases; hay que recordar que esta longitud puede conocerse de forma precisa, gracias a que la regla bimetálica está constituida por dos reglas de diferentes metales, sujetas por un extremo, siendo el otro extremo libre. De esta forma puede medirse el desplazamiento relativo de una de ellas respecto de la otra, gracias a una regleta graduada, colocada en la regla inferior. Entonces, la alteración de las longitudes habidas por la distinta dilatación térmica de estas reglas, puede medirse con precisión, hallándose también la verdadera longitud de la regla bimetálica empleada, mediante la fórmula

$$b = A + B \delta$$

donde A y B son constantes conocidas, b es la longitud de la regla bimetálica en metros (aproximadamente 4 m) y δ es la lectura tomada en la regleta en mm.

En una versión posterior de este método, empleada por primera vez en 1885 por el sueco Jäderin, las reglas bimetálicas fueron sustituidas por los hilos de invar, estos hilos se colocan entre dos soportes y se tensan mediante dos pesas. Los hilos de invar están compuestos de un material llamado *invar*, cuya composición es 36 % de níquel y 64 % de acero; su longitud es de unos 24 m, con una sección recta de 1.65 mm de diámetro. Debido a su composición, estos hilos presentan la ventaja de variar muy poco de longitud por efecto de los cambios de temperatura, así las correcciones a efectuar por este efecto son siempre muy pequeñas. Otra ventaja que presenta el uso de estos hilos, reside en que con ellos medimos las distancias de 24 en 24 metros, mientras que con las reglas bimetálicas las distancias se miden de 4 en 4 metros. Con todo, el método sigue siendo muy laborioso, ya que, es necesario que no se produzca una desalineación, cuando se coloca el patrón una y otra vez, delante de la

posición anterior. Esto ha hecho que estos métodos antiguos hayan sido gradualmente descartados, en favor de métodos más modernos de medida, basados en la interferometría, o también en la medida de los tiempos de retraso de una señal enviada y recibida por una misma estación de registro.

Actualmente, los teodolitos dotados de distanciómetros ópticos (estaciones totales), son una herramienta útil para llevar a cabo las medidas que conlleva una triangulación, ya que, con ellos pueden medirse tanto ángulos como distancias, sin cambiar de instrumento, resultando cómodos y precisos. Generalmente, son instrumentos fáciles de manejar para el técnico que debe realizar las medidas, haciendo que una campaña de este tipo resulte menos costosa, en tiempo y esfuerzo.

En consecuencia, con los instrumentos mencionados o utilizando un distanciómetro, podemos calcular la distancia entre dos puntos en línea recta, a esta distancia se le llama en Geodesia la *cuerda*. Pero hay que notar, que la distancia buscada es la medida sobre la superficie de referencia, es decir, el *arco*, utilizando la terminología de la Geodesia. Por ello, es necesario relacionar ambas, para obtener el arco a través de la medida directa de la cuerda.

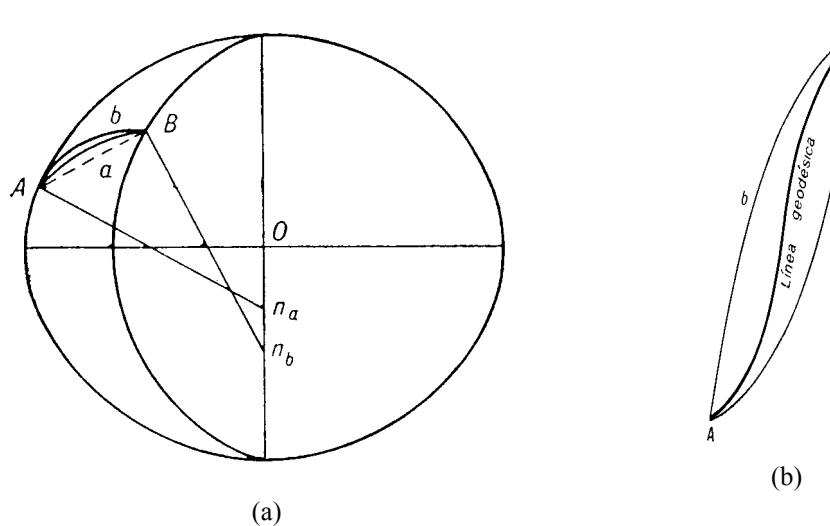


Fig. 3. (a) Representación de las secciones normales recíprocas correspondientes a los puntos A y B. (b) Representación de la línea geodésica que une los puntos A y B.

La figura 3(a) representa este problema, en ella vemos que para dos puntos dados sobre la superficie de referencia, la cuerda es la línea representada por un trazo recto discontinuo. En cambio, la verdadera distancia entre tales puntos considerados, debe calcularse siguiendo la *línea geodésica* (curva de mínima distancia entre dos puntos, medida sobre la superficie) representada en la figura 3(b), como puede verse esta línea esta situada dentro de las *secciones normales recíprocas*, representadas por las curvas AaB y BbA . La sección normal AaB es una curva que se define mediante la intersección de la superficie de referencia considerada (un elipsoide de revolución achatado por los polos), con el plano definido por la dirección normal a dicha superficie de referencia en el punto A, dirección n_a , y el punto B; así, el corte de este plano y la superficie de referencia, es la curva AaB . De forma similar definimos BbA , intercambiando los papeles que juegan los puntos A y B.

Cuando consideramos distancias AB menores de 500 km, podemos aceptar que la medida del arco s_{AB} sobre la línea geodésica, es aproximadamente igual a la media de las medidas sobre las secciones normales recíprocas, es decir

$$s_{AB} = (s_A + s_B) / 2$$

obteniendo las cantidades s_A y s_B mediante el desarrollo en serie

$$s = c \left[1 - \frac{\kappa^2}{24} c^2 - \frac{\kappa \kappa'}{24} c^3 + \frac{c^4}{1152} (15\kappa^4 - 16\kappa'^2 - 24\kappa\kappa'' + 8\kappa^2\tau^2) + \dots \right]$$

donde c es la cuerda, s es la distancia s_A o s_B según se considere la sección normal AaB o BbA , κ es la curvatura y τ es la torsión (que por tratarse de una curva plana es cero). Los valores de la curvatura y sus derivadas respecto del arco (denotadas con prima), pueden hallarse aplicando el teorema de Euler.

Así, realizadas todas las operaciones la expresión anterior nos dará la distancia buscada. Debemos notar que cuando los puntos A y B sean muy próximos, la cuerda y el arco serán prácticamente la misma cantidad. Esta situación suele ser frecuente en la medida directa de bases sobre el terreno, donde las distancias consideradas no superan los 15 o 20 km.

7. Determinación de ángulos

Tal como puede verse en la figura 3(a), cuando nos situamos con un instrumento en el punto A, observando el punto B, o al contrario, cuando observamos el punto A desde el B; estamos determinando secciones normales recíprocas, de tal forma, que las medidas de los ángulos, llevadas a cabo en una triangulación estarán falseadas en una cantidad δ , como la representada en la figura 4, en la que podemos ver un triángulo geodésico ABC y las secciones normales recíprocas, correspondientes a las observaciones realizadas en sus vértices.

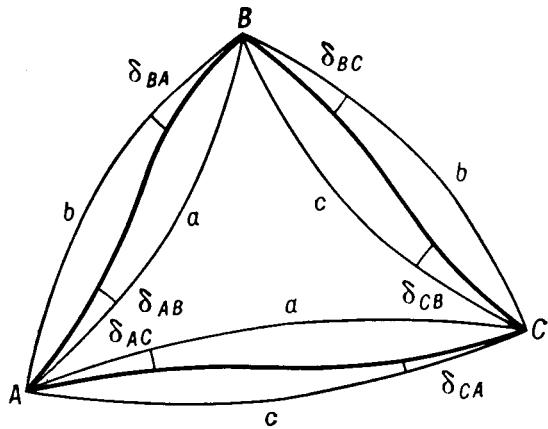


Fig. 4. Representación de un triángulo geodésico y las secciones normales recíprocas que corresponden a sus vértices. La curva de trazo grueso que une dichos vértices es la línea geodésica que pasa por ellos.

Para corregir estas medidas angulares se debe obtener, en primer lugar, el ángulo Δ que forman dos secciones normales recíprocas en un vértice, por ejemplo, el ángulo que

forman las curvas AaB y BbA , en el punto A o en el B . En segundo lugar, debemos relacionar este ángulo con la pequeña cantidad δ que constituye la corrección.

Para hallar el ángulo Δ tenemos en cuenta que éste será siempre una cantidad muy pequeña, entonces, obteniendo su tangente mediante la expresión

$$\operatorname{tg} \Delta = -\frac{s^2}{2} \left[\kappa \tau + s \left(\frac{1}{3} \kappa' \tau - \kappa \tau' \right) + \dots \right]$$

donde τ denota en este caso la *torsión geodésica* (que es distinta de cero). De esta fórmula y tras despreciar términos de grado s^3 y superiores, podemos deducir

$$\Delta \approx \frac{s^2 e^2}{4a^2} \cos^2 \phi \operatorname{sen} 2A$$

donde ϕ es la latitud del vértice para el que se calcula Δ , e es la excentricidad del elipsoide de referencia, a es su semieje mayor y A es el acimut de la sección normal directa.

Conocido Δ , obtendremos δ mediante la suma de una progresión geométrica cuyo valor es la tercera parte de Δ . Esta progresión geométrica, proviene de un procedimiento matemático descrito con detalle por Zakatov (1981, pág. 65).

BIBLIOGRAFÍA

Cid R. y Ferrer S. (1997). *Geodesia Geométrica, Física y por Satélites*. Instituto Geográfico Nacional. Ministerio de Fomento.

Martín Asín F. (1983). *Geodesia y Cartografía Matemática*. Instituto Geográfico Nacional.

Zakatov P. S. (1981). *Curso de Geodesia Superior*. MIR.

Geodesia Física. Aplicaciones

8. Relación entre los observables físicos y la Geodesia

Como ya se ha dicho antes, en las campañas geodésicas se llevan a cabo medidas directas, tales como, determinación de distancias o de ángulos; estas medidas están referidas al *horizonte local*, cuya dirección perpendicular es la *línea de la plomada*, es decir, la dirección del vector aceleración de la gravedad, en el punto en el que se ubica el instrumento. Es obvio entonces, que magnitudes físicas, como la masa y el campo de gravedad, juegan un papel importante en la geodesia, ya que, cuando colocamos un instrumento sobre el terreno no lo referimos a la dirección normal al elipsoide de referencia (que en ese momento es desconocida para nosotros), sino a la línea de la plomada.

En este sentido, el importante papel que juega el campo de gravedad terrestre, queda todavía más claro, si tenemos en cuenta que cuando el topógrafo representa la altura de un punto de la superficie de la Tierra, no son las alturas referidas al elipsoide de referencia las que tienen sentido, sino las alturas referidas al geoide. Así, el conocimiento de las alturas de los puntos de la superficie terrestre, determina el relieve que el topógrafo debe representar en los mapas topográficos. En consecuencia, altura H de los puntos de la superficie terrestre, es una de las coordenadas que determinan la figura de la Tierra, junto con las coordenadas geodésicas latitud y longitud, siendo esta altura H una cantidad que requiere el conocimiento del campo de gravedad terrestre para su determinación.

Además, el valor preciso de las diferencias de alturas en los distintos puntos de la superficie terrestre, es absolutamente necesario para proyectar y construir diferentes instalaciones, así como para la realización de cálculos en los cuales hay que tomar en cuenta la posición de los puntos en el espacio; por ejemplo, cuando se desea diseñar correctamente grandes canales para la distribución de agua, o para la retirada de aguas residuales, es necesario saber dónde es mayor o menor el potencial de la gravedad terrestre, y ello es posible determinando con precisión las alturas respecto al geoide.

Como consecuencia de todo lo dicho, es necesario dedicar un tiempo suficiente al estudio y comprensión, de todo lo relativo al campo de gravedad terrestre y al geoide. Precisamente el estudio riguroso de estos temas es competencia de la *Geodesia Física*, disciplina que comienza a desarrollarse en el siglo XIX y alcanza su máxima expansión con el lanzamiento de los satélites artificiales en nuestro siglo, de cuyo seguimiento obtenemos la información más precisa del campo de gravedad global creado por toda la Tierra.

En este apartado dedicado a la Geodesia Física y sus aplicaciones, vamos a procurar sobre todo referirnos a las aplicaciones, concretamente, a las topográficas y geodésicas; enviando al lector a referencias especializadas (listadas al final de este tema), para obtener una descripción más completa de aspectos más teóricos relacionados con el campo de gravedad y su potencial asociado.

9. El campo de gravedad terrestre. Superficies de nivel. El geoide

El geoide como superficie de referencia fundamental, es una superficie cuya forma refleja la distribución de masas en la Tierra, por ello, debemos empezar recordando cuál es la fuerza gravitatoria producida por una cierta distribución de masa, y su potencial asociado, para entender cómo surge de estos conceptos y del concepto de *superficie equipotencial*, una definición de superficie de referencia, tal como es la definición de geoide.

Así, debemos comenzar recordando que cuando consideramos dos masas puntuales, separadas una distancia s , la fuerza con la que cada una atrae a la otra es

$$|\mathbf{F}| = \frac{km_1m_2}{s^2} \text{ (ley de gravitación de Newton)}$$

donde k denota la *constante de gravitación*, cuyo valor es $66.7 \times 10^{-9} \text{ cm}^3 \text{g}^{-1} \text{seg}^{-2}$. Si consideramos la masa atraída m_2 con valor unidad, la ecuación anterior puede escribirse como

$$|\mathbf{F}| = \frac{km}{s^2}$$

donde hemos denotado con m la masa atrayente. La representación de esta fuerza en un sistema de coordenadas cartesiano, es la que puede verse en la figura 1(a). A la vista de esta figura es fácil notar que el vector \mathbf{F} se puede descomponer en la forma

$$\mathbf{F} = -F(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = -\frac{km}{s^2} \left(\frac{x - \xi}{s}, \frac{y - \eta}{s}, \frac{z - \zeta}{s} \right)$$

donde $s = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$.

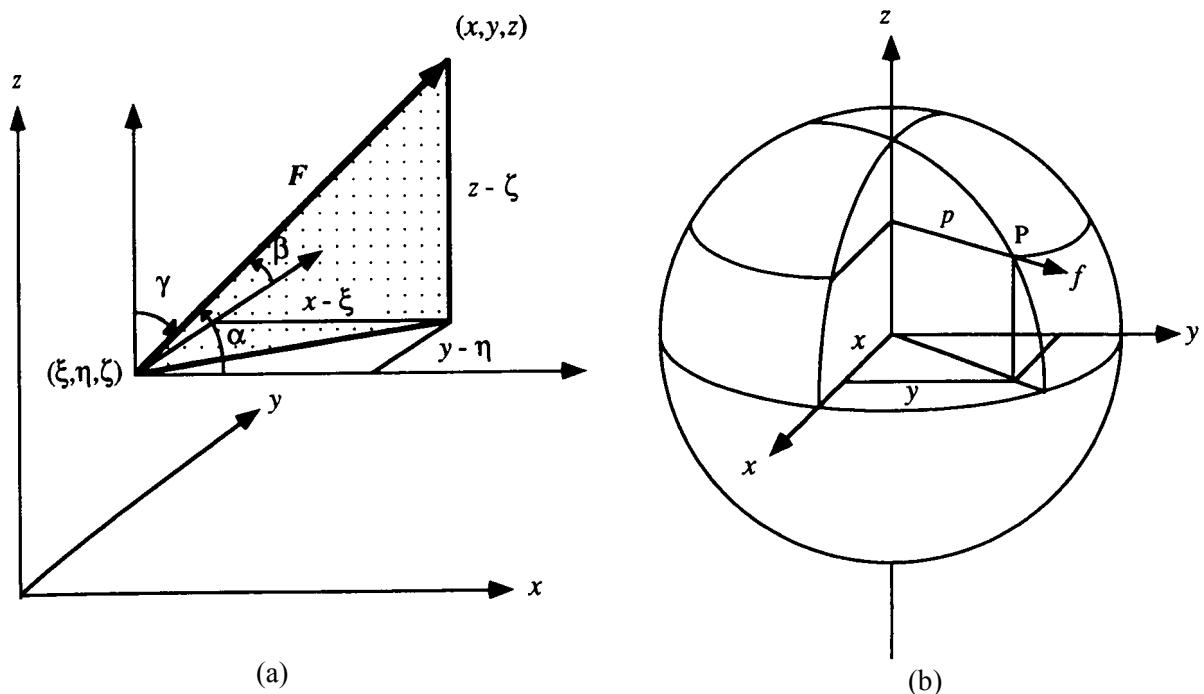


Fig. 1. (a) Fuerza de atracción gravitatoria debida a una masa puntual. (b) Fuerza centrífuga debida a la rotación de la Tierra, en punto P de la misma.

También debemos recordar que el campo gravitatorio es un campo conservativo, por ello puede obtenerse a través del gradiente de un campo escalar, es decir

$$\mathbf{grad} V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right) = \mathbf{F}$$

donde V es su función potencial asociada, el *potencial gravitatorio*; que en el caso de considerar una masa puntual, adopta la forma

$$V = \frac{km}{s}$$

Cuando consideramos una distribución de masas puntuales, la expresión anterior se podrá generalizar mediante la aplicación del sumatorio

$$V = \sum_i V_i = \sum_i \frac{km_i}{s_i}$$

obviamente, para una distribución continua de masa M , el sumatorio debe ser reemplazado por la integral, escribiendo

$$V = k \iiint_M \frac{dm}{s} = k \iiint_V \frac{\rho dv}{s}$$

donde ρ denota la densidad de masa y V denota el volumen del cuerpo considerado. En el caso de que este cuerpo sea la Tierra, debemos tener en cuenta que la misma no está en reposo, sino rotando con una velocidad angular de $0.7297 \times 10^{-4} \text{ seg}^{-1}$. En este caso para poder considerar que la Tierra está en reposo y aplicar la ecuación anterior, debemos incluir una fuerza de inercia, conocida como *fuerza centrífuga*, de tal forma que para cualquier punto P sobre la superficie de la Tierra, debemos considerar una fuerza \mathbf{f} , como la representada en la figura 1(b); dicha fuerza puede escribirse como

$$\mathbf{f} = \omega^2 \mathbf{p} = (\omega^2 x, \omega^2 y, 0) = \mathbf{grad} \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \quad , \quad \phi = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2)$$

donde \mathbf{p} es un vector distancia, paralelo al plano ecuatorial, que va desde el eje de rotación de la Tierra hasta el punto P . Esto nos lleva a una definición de potencial gravitatorio del tipo

$$W(x, y, z) = V + \phi = k \iiint_V \frac{\rho dv}{s} + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2)$$

suma del potencial gravitatorio terrestre V y el *potencial centrífugo* ϕ . A este potencial obtenido como suma de los anteriores, se le llama *potencial de la gravedad*, siendo su fuerza asociada conocida con el nombre de *gravedad*, ésta puede ser obtenida mediante

$$\mathbf{grad} W = \left(\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z} \right) = \mathbf{g}$$

El módulo de este vector o magnitud de la gravedad, se suele expresar en *gales* siendo $1 \text{ gal} = 1 \text{ cm/seg}^2$. La magnitud de este vector se incrementa sobre la superficie de la Tierra, cuando vamos desde el ecuador hacia los polos, debido a que disminuye la fuerza centrífuga, concretamente, la gravedad en el ecuador es 978 gal y en los polos 983 gal, aproximadamente.

En lo referente a W , el potencial de la gravedad, hay que recordar que la superficie para la cual éste es constante, es decir, $W(x,y,z) = W_0$, se denomina *superficie equipotencial* o *superficie de nivel*, siendo el *geoide* una superficie de equipotencial del campo de gravedad terrestre, que coincide con el nivel medio de los océanos. La figura 2(a) nos muestra la relación que existe entre las superficies de nivel y la línea de la plomada, notando que estas superficies son normales a la línea de la plomada.

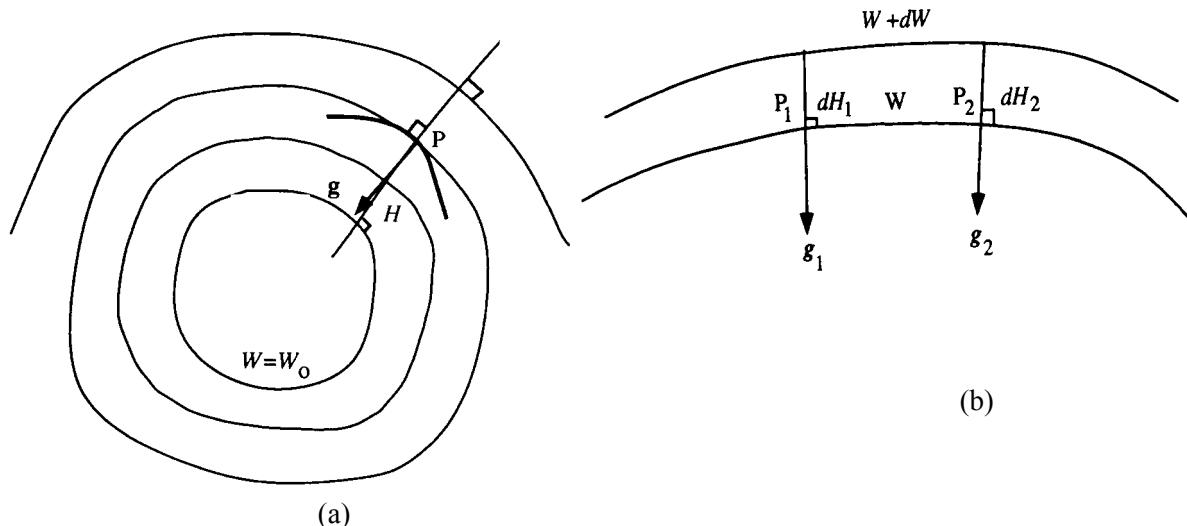


Fig. 2. (a) Superficies equipotenciales del campo de gravedad y línea de la plomada en un punto P. (b) Gravedad sobre una superficie equipotencial.

Las líneas de la plomada o normales a las superficies equipotenciales, son curvas de radio de curvatura finito y torsión no nula. Estas curvas son muy importantes en la geodesia, pues sirven para medir la altura de un punto P con respecto al geoide, a esta altura se le llama *altura ortométrica*. Esta altura no debe ser confundida con la altura sobre el nivel del mar, debido a que el geoide no es una superficie de océano ideal, por ello, el geoide no coincide, exactamente, con el nivel del mar. En este sentido, uno de los objetivos de la geodesia es encontrar la separación de la superficie del océano y el geoide.

Centrándonos ahora en el concepto de altura ortométrica, podemos notar que el desplazamiento elemental $d\mathbf{r}$, será paralelo a la línea de la plomada, en cada punto de la misma, por tanto

$$dW = \mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} = g dH \cos(\mathbf{g}, d\mathbf{r}) = g dH \cos 180^\circ = -g dH$$

resultando obvio, que la gravedad no puede ser constante en la misma superficie equipotencial, debido a que estas superficies no son ni regulares ni concéntricas, con respecto al centro de masa de la Tierra. Esta situación está bien ilustrada en la figura 2(b), en la que podemos observar que

$$dW = -g_1 dH_1 = -g_2 dH_2 \Rightarrow g_1 \neq g_2$$

por ser $dH_1 \neq dH_2$.

También hay que notar que esta definición de altura, en la que la superficie de referencia es el geoide, nos lleva a establecer un sistema de alturas en el que obtenemos la altura de un punto P en la forma

$$H = - \int_{W_0}^W \frac{dW}{g} = \int_0^C \frac{dC}{g}$$

donde $C = W - W_0$ es denominado *número geopotencial*.

Llegados a este punto cabe preguntarse qué relación existe entre este sistema de alturas y las alturas determinadas sobre el elipsoide de referencia. La respuesta a esta cuestión puede verse bien ilustrada en la figura 3(a), en la que representamos para un punto P, sus alturas asociadas, tanto la elipsoidal h como la ortométrica H , existiendo la sencilla relación

$$h = H + N$$

entre ambas.

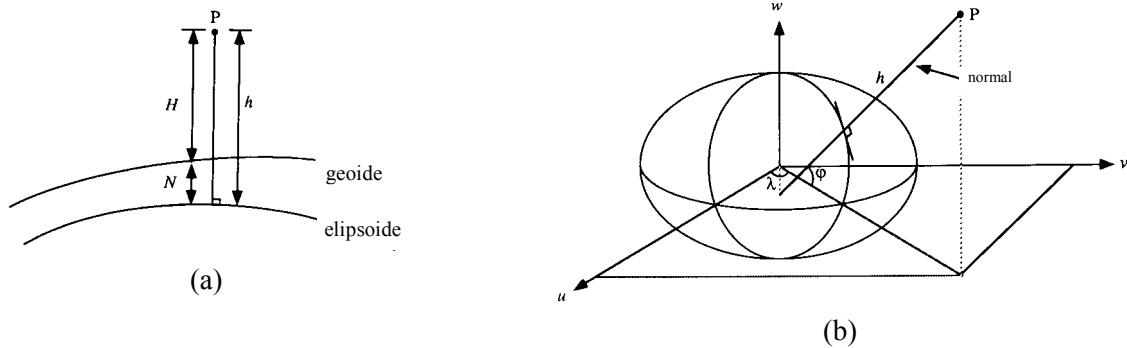


Fig. 3. (a) Altura ortométrica y elipsoidal en un punto P. (b) Elipsoide de referencia.

En consecuencia, determinada h o H , obtener la otra altura es sencillo si se conoce N , la *ondulación del geoide*. Éste es uno de los problemas principales de la geodesia práctica o aplicada, la determinación de las alturas del geoide sobre un elipsoide de referencia dado. Para resolver este problema hemos de fijar, en primer lugar, un elipsoide de referencia que sea lo más cercano a la figura de la Tierra, tomando por ello un elipsoide de revolución ligeramente aplastado por los polos. Este elipsoide vendrá definido entonces por dos parámetros, su semieje mayor a (aproximadamente el radio ecuatorial terrestre) y su aplastamiento f definido por

$$f = \frac{a - b}{a}$$

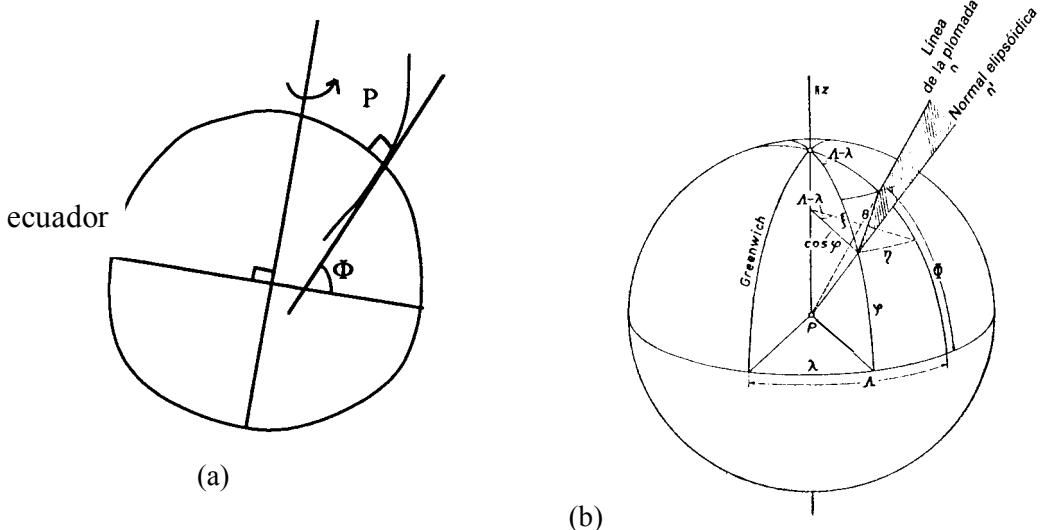


Fig. 4. (a) Latitud astronómica de un punto P. (b) Desviación de la vertical en el punto P.

donde b es el semieje menor. La figura 3(b) muestra las coordenadas elipsoidales de un punto P , sobre el elipsoide de referencia elegido. Estas coordenadas (ϕ, λ, h) no son obviamente las coordenadas que determinamos en una campaña geodésica, sino las *coordenadas naturales* (Φ, Λ, H) . Esto es debido a que cuando situamos un instrumento sobre el terreno, la vertical es para nosotros la dirección de la línea de la plomada, tal como puede verse en la figura 4(a), siendo la latitud y longitud del lugar, la latitud y longitud *astronómicas*. La separación que existe entre la línea de la plomada y la normal al elipsoide de referencia en el punto P , punto en el que situamos el instrumento, está representada en la figura 4(b). A partir de esta figura pueden obtenerse las relaciones

$$\xi = \Phi - \phi$$

$$\eta = (R \cos \phi)(\Lambda - \lambda) = (\Lambda - \lambda) \cos \phi$$

donde R es el radio de la esfera situada en el punto P , cuyo valor es la unidad. Las cantidades (ξ, η) reciben el nombre de *componentes de la desviación de la vertical*. Así, las medidas realizadas sobre el terreno en un vértice de una red geodésica (Φ_P, Λ_P, H_P) , deben ser reducidas a las cantidades (ϕ_P, λ_P, h_P) , sobre el elipsoide de referencia utilizado en la campaña de triangulación, mediante las fórmulas

$$\phi = \Phi - \xi \quad , \quad \lambda = \Lambda - \frac{\eta}{\cos \phi} \quad , \quad h = H + N$$

donde conocida la ondulación del geoide y las componentes de la desviación de la vertical, será fácil pasar del sistema de referencia físico al sistema de referencia matemático, o viceversa.

A la vista de lo dicho en este apartado, el problema que queda planteado es pues la determinación de las cantidades (N, ξ, η) . Precisamente, éste va ser el objetivo del siguiente apartado. Abordaremos el problema de calcular N , en primer lugar; indicando a continuación como pueden calcularse (ξ, η) . Estos aspectos se comentarán brevemente remitiendo al lector, como en otras ocasiones, a unas referencias especializadas, para conseguir una descripción más detallada de los métodos que se siguen en la obtención de las cantidades mencionadas.

10. Ondulación del geoide y desviación de la vertical

Cuando observamos la figura 3(a), notamos que la cantidad N que hemos definido como ondulación del geoide, puede obtenerse relacionando el elipsoide de referencia y el geoide. Para relacionar ambas figuras de la Tierra, es necesario notar que, si escribimos el potencial W en la forma

$$W(x, y, z) = U(x, y, z) + T(x, y, z) \quad , \quad U(x, y, z) = V(x, y, z) + \phi(x, y, z)$$

donde T se denomina *potencial perturbador* o *potencial anómalo* y U es la *función potencial normal* asociada a un elipsoide de revolución cuya ecuación es

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

entonces, la pequeña separación entre la superficie $W(x, y, z) = W_0$ y la superficie $U(x, y, z) = U_0$ (con $U_0 = W_0$), estará relacionada directamente con el término $T(x, y, z)$; concretamente,

$$N = \frac{T}{\gamma} \quad (\text{fórmula de Bruns}) \quad , \quad \gamma = \mathbf{grad} \ U$$

donde γ es denominado *gravedad normal*. Este vector tendrá la dirección de la normal al elipsoide de referencia, tal como se indica en la figura 4(b), siendo su diferencia con el vector gravedad, denominada *anomalía de la gravedad* Δg . Esta última cantidad definida, nos permite obtener el potencial perturbador y como consecuencia la ondulación del geoide, si llevamos a cabo un desarrollo en armónicos esféricos de este potencial perturbador T (ver por ejemplo Heiskanen y Moritz (1985)), teniendo como resultado final las importantes relaciones

$$T = \frac{R}{2\pi} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma \quad , \quad N = \frac{R}{4\pi G} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma \quad (\text{fórmula de Stokes})$$

$$S(\psi) = \frac{1}{\sin(\psi/2)} - 6 \sin(\psi/2) + 1 - 5 \cos \psi - 3 \cos \psi \ln \left[\sin(\psi/2) + \sin^2(\psi/2) \right]$$

donde R es el radio medio terrestre (6371 km), G es el valor medio de la gravedad sobre la Tierra (979.8 gales) y σ es el área de la esfera unidad, estando por ello las integral anteriores extendidas a toda la esfera unidad, tal como se indica en la figura 5(a); en esta figura también podemos ver que el papel que juega el ángulo ψ .

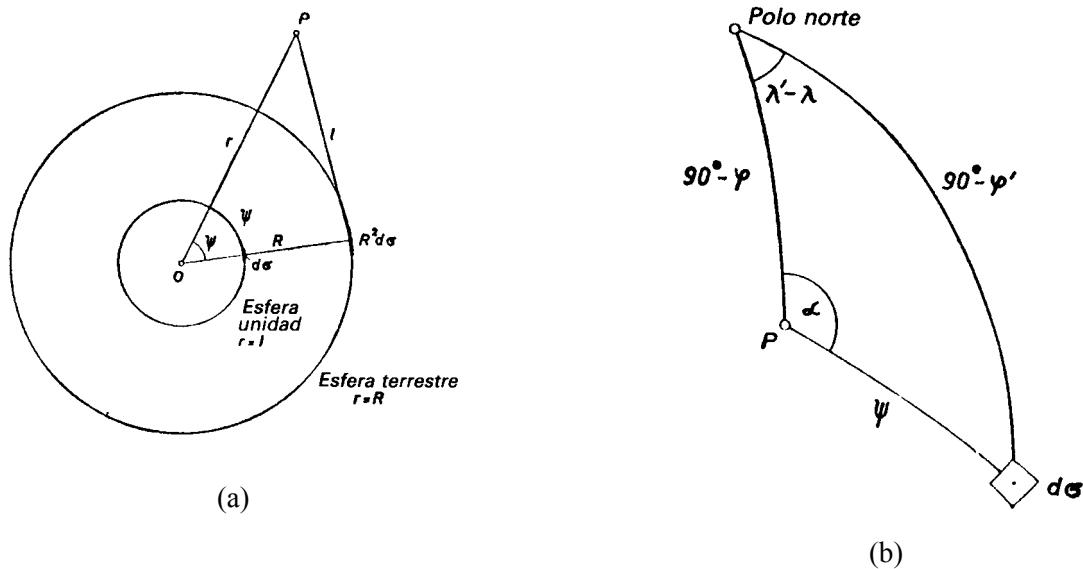


Fig. 5. (a) Notaciones seguidas para obtener la fórmula de Stokes. (b) Relación entre las coordenadas polares (ψ, α) y las coordenadas geográficas (ϕ, λ) , en la esfera de radio unidad.

La fórmula de Stokes publicada por él en 1849, es la expresión matemática más importante de la Geodesia Física, debido a que hace posible conocer la figura de la Tierra, es decir, la ondulación del geoide; a partir de datos gravimétricos. Debemos notar también que la ecuación integral de Stokes es el vínculo fundamental entre el campo de gravedad terrestre y la figura de la Tierra, confirmando la afirmación realizada al principio de este capítulo, cuando se decía que para avanzar hacia una figura de la Tierra más precisa que un elipsoide de revolución, es necesario considerar el campo de gravedad que crea la masa de la Tierra. Vemos ahora totalmente claro, el papel tan importante que juega el estudio y determinación del campo de gravedad terrestre, en la obtención precisa de la figura de la Tierra, ya que, si disponemos una colección de datos suficiente, consistente en anomalías de la gravedad determinadas por toda la superficie de la Tierra, podemos obtener la ondulación del geoide, tal como se indica en las figuras 6(a) y 6(b).

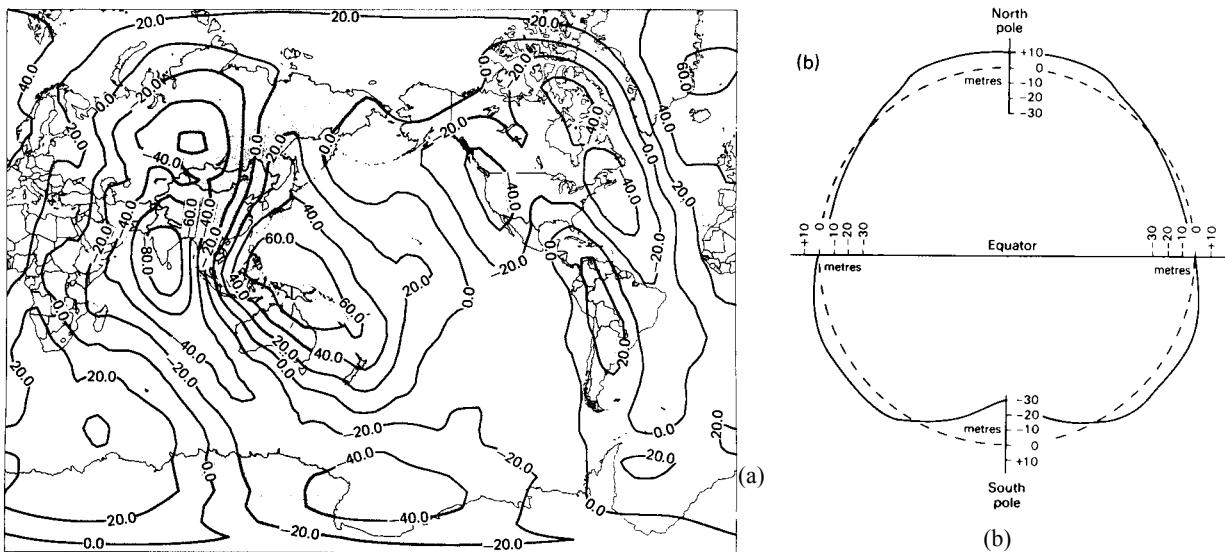


Fig. 6. (a) Mapa de la ondulación del geoide sobre un elipsoide de revolución con un aplanamiento de 1/298.25. (b) Corte del geoide (línea sólida) y del elipsoide de revolución (línea a trazos), mostrando los detalles de la forma del geoide a una escala distinta de la empleada para la superficie de referencia.

No obstante, hay que señalar algunas limitaciones en la aplicación de la fórmula de Stokes, debidas a las hipótesis realizadas para la obtención de la misma. Concretamente, podemos notar que :

1. La fórmula presentada para la ondulación del geoide, ha sido obtenida considerando que el elipsoide de referencia, superficie $U(x,y,z) = U_0$, tiene el mismo potencial que el geoide ($U_0 = W_0$). Además, esta superficie debe encerrar en su interior una masa, que sea numéricamente igual a la de toda la Tierra.
2. Elipsoide de referencia debe tener su centro en el centro de la Tierra.
3. El potencial anómalo o potencial perturbador debe ser armónico fuera del geoide, es decir, $T(x,y,z)$ puede ser desarrollado en armónicos esféricos. Esto significa que el efecto de las masas por encima del geoide, debe ser eliminado aplicando adecuadas reducciones a los valores de la gravedad determinados. De lo contrario, no será posible aplicar la expresión integral de Stokes.

En consecuencia, la determinación práctica del geoide, tal como se muestra en la figura 6(a), requerirá modificar la fórmula de Stokes para poder utilizar un elipsoide de referencia arbitrario, de tal forma que podamos emplear en el cálculo del geoide, una superficie de referencia $U(x,y,z) = U_0$ para la que no se requiera que $U_0 = W_0$, condición que en la práctica puede ser muy difícil de conseguir, limitando mucho los posibles elipsoides a emplear. Por otra parte, el cálculo por este método gravimétrico de la ondulación del geoide, nos obligará a eliminar el efecto de las masas por encima del geoide, adoptando para ello diversas hipótesis, que podemos encontrar desarrolladas con detalle en la bibliografía más básica de la Geodesia Física (ver por ejemplo Heiskanen y Moritz (1985), o también Vanícek y Krakiwsky (1986)).

Llegados a este punto cabe preguntarse si existe alguna expresión parecida a la fórmula de Stokes, que nos permita calcular la desviación de la vertical en un punto P del

geoide. La respuesta es afirmativa; existen unas fórmulas parecidas a ésta, que nos permiten hallar las componentes (ξ, η) de la desviación de la vertical, a partir de un conjunto de anomalías de la gravedad distribuidas por toda la Tierra. Estas fórmulas son debidas a Vening Meinesz, y fueron obtenidas por este geodesa en 1928, su expresión es

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} = \frac{1}{4\pi G} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{\pi} \Delta g(\psi, \alpha) \frac{dS(\psi)}{d\psi} \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} \sin \psi d\psi d\alpha$$

donde α y ψ son las coordenadas polares sobre la esfera de radio unidad, tal como se indica en la figura 5(b); siendo $d\sigma = \sin \psi d\psi d\alpha$ y $S(\psi)$ la función de Stokes, cuya expresión ha sido dada anteriormente.

11. Ondulación del geoide y alturas ortométricas. Método GPS-Nivelación

Después de todo lo dicho en el apartado anterior, cuando volvemos a la sencilla fórmula

$$h = H + N$$

notamos que al obtener la cantidad N , tal como se ha indicado antes, siguiendo el método gravimétrico; podemos escribir

$$H = h - N$$

de donde, conocida la altura elipsoidal h del punto P considerado y determinado N mediante la integral de Stokes, puede hallarse la altura ortométrica H de ese punto. Cabe ahora preguntarse si es posible determinar también H , mediante los valores de la gravedad medida en la superficie de la Tierra, ya que, en caso afirmativo, podríamos calcular la altura del geoide en un punto P, sin necesidad de recurrir a la integral de Stokes, la cual requiere para su solución, una colección suficiente de medidas de la gravedad distribuidas por toda la Tierra.

En efecto, puede hallarse con precisión la altura ortométrica de un punto sin tener conocimiento del geoide, o al menos sin un conocimiento detallado o muy preciso del mismo. El procedimiento que se sigue para calcular las alturas ortométricas, directamente sobre el terreno, se llama *nivelación*, y a continuación vamos a describirlo con cierto detalle.

En principio, el procedimiento de *nivelación geométrica* es bien conocido por los topógrafos, consiste en medir la diferencia de altura entre dos puntos A y B, como los representados en la figura 7(a), mediante la observación de la diferencia de lecturas sobre dos miras verticales situadas en los puntos considerados. La diferencia de altura entre los dos puntos resulta ser entonces, la diferencia de las lecturas l_1 y l_2 , observadas con el nivel (instrumento de nivelación), es decir,

$$\delta H_{AB} = l_1 - l_2 = A \bar{A} - B \bar{B}$$

siendo δH_{AB} la diferencia de altura geométrica entre los puntos A y B. Cuando este procedimiento se repite una y otra vez, siguiendo un *círculo de nivelación*, es decir, una línea de nivelación cerrada, la suma algebraica de los incrementos de nivelación o diferencias de altitud medidas, no es exactamente cero, como cabría esperar si realizamos estas medidas con gran precisión. Este error, que se conoce como *error de cierre* de un circuito de nivelación, nos indica que el procedimiento de nivelación exacto, es algo más complicado que la simple determinación de las diferencias de altura.

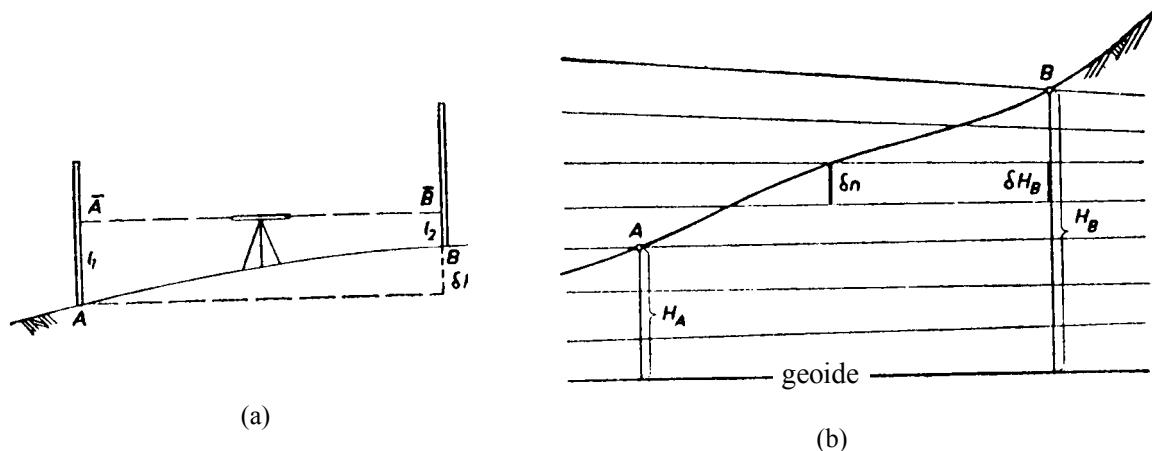


Fig. 7. (a) Esquema del procedimiento de nivelación geométrica. (b) Diferencias de alturas ortométricas debidas al no paralelismo de las superficies de nivel.

Para entender lo que sucede basta considerar dos puntos A y B, suficientemente alejados, de tal manera que el proceso mostrado en la figura 7(a), debe ser aplicado repetidas veces. Esta situación es la que esta representada en la figura 7(b), en esta figura la diferencia de altitud nivelada δn , es distinta al incremento δH_B en la línea de la plomada que pasa por B. Ello es debido al no paralelismo de las superficies de nivel, tal como se ve en la figura, en consecuencia, si designamos por δW el incremento del potencial de la gravedad, tenemos

$$-\delta W = g \delta n = g' \delta H_B$$

donde g es la gravedad en la estación de nivelación y g' es la gravedad sobre la línea de la plomada de B en δH_B . La relación anterior implica que

$$\delta H_B = \frac{g}{g'} \delta n \neq \delta n$$

no habiendo relación geométrica directa entre el resultado de la nivelación geométrica y la diferencia de alturas ortométrica. Esta consecuencia es inmediata si notamos que la combinación de medidas geométricas con la gravedad, nos proporciona la diferencia de potencial δW , de tal forma que

$$W_B - W_A = - \sum_A g \delta n$$

Así, la nivelación combinada con medidas de la gravedad nos proporciona diferencias de potencial, esto es, cantidades físicas no geométricas; con una ventaja añadida, la diferencia de potencial entre dos puntos es independiente del camino que se siga, obteniéndose el mismo resultado con independencia de los itinerarios que se sigan, por ello, si medimos a lo largo de un circuito de nivelación (seguimos un trayecto cerrado) sucede que

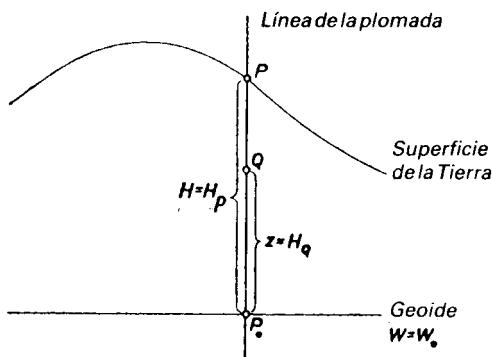
$$W_A - W_A = 0 = \int_A^A g \delta n$$

donde hemos cambiado el sumatorio por la integral por ser teóricamente más riguroso. Este resultado es imposible, en general, si consideramos sólo medidas geométricas, ya que, la suma de incrementos de nivelación depende de la trayectoria, esto es

$$\Delta n_{AB} = \sum_A^B \delta n \quad , \quad \int_A^A dn = \text{error de cierre}$$

Como consecuencia de todo lo dicho, las diferencias de potencial son básicas en toda teoría de altitudes, concluyendo que la nivelería sin medidas de gravedad, que en la práctica puede aplicarse a pequeñas distancias (para las que las superficies de nivel son prácticamente paralelas), no tiene significado desde un punto de vista riguroso, llevando a contradicciones como es el error de cierre. Todo esto hace que se considere, en trabajos geodésicos de gran precisión, la diferencia de altura ortométrica δH_{AB} en lugar de la diferencia de altura geométrica Δn_{AB} ; ya que, tal como puede verse en la figura 7(b), la altura de los puntos A y B sobre el geoide, H_A y H_B , es siempre la misma, con independencia del trayecto de nivelería que se siga entre ambos, debido a que la definición de altura ortométrica es consecuencia de principios físicos, no una cantidad obtenida de un sumatorio.

Fig. 8. Altura ortométrica de un punto P sobre la superficie de la Tierra.



Quedando claro qué sistema de alturas debe usarse para obtener una gran precisión, el problema planteado es la realización de esta medida de altura, es decir, el procedimiento operativo que debe seguirse para calcular la altura ortométrica de un punto P. Para ello, vamos a considerar un punto P sobre la superficie de la Tierra, tal como se indica en la figura 8, designando por P_0 la intersección con el geoide, de la línea de la plomada que pasa por P, entonces, recordando la definición de número geopotencial, podemos escribir

$$W_0 - W = C = \int_0^H g dH = H \frac{1}{H} \int_0^H g dH = \bar{g} H$$

donde

$$\bar{g} = \frac{1}{H} \int_0^H g dH$$

es el valor medio de la gravedad sobre la línea de la plomada entre P y P_0 . La expresión anterior nos permite obtener la altura ortométrica del punto P en la forma

$$H = \frac{C}{\bar{g}}$$

esta ecuación no es una tautología, es realmente una fórmula de utilidad práctica, debido a que la gravedad media \bar{g} no depende fuertemente con la altura ortométrica, en consecuencia sin un conocimiento preciso de la altura del punto P sobre el geoide, es decir, con un valor inicial de H suficientemente cercano a la verdadera altura ortométrica, podemos abordar el cálculo de la gravedad \bar{g} . En este sentido, podemos encontrar expresiones aproximadas de \bar{g} en diversos libros de geodesia (ver por ejemplo, Heiskanen y Moritz (1985)).

Por otra parte, si se quiere aplicar la sencilla fórmula anterior es necesario hallar, además de \bar{g} , el número geopotencial de P , designado por C . Para ello, un procedimiento que puede seguirse es elegir un punto O al nivel del mar, es decir, sobre el geoide; generalmente, un punto apropiado sobre la costa. Entonces, puede determinarse el número geopotencial de P aplicando la integral

$$C = W_0 - W = \int_0^P g \, dn$$

siendo como ya sabemos independiente del itinerario de nivelación utilizado para relacionar los puntos P y O . El número geopotencial se mide en unidades geopotenciales (u.g.p.), y éstas están derivadas de las unidades de la gravedad y la altura, mediante la relación

$$1 \text{ u.g.p.} = 1 \text{ kgal.m} = 1000 \text{ gal.m}$$

como g es aproximadamente 0.98 kgal, tenemos que C es aproximadamente igual a $0.98H$.

Los procedimientos descritos para el cálculo de los números geopotenciales y el valor de la gravedad media \bar{g} , introducen un error muy pequeño en la determinación de la altura ortométrica, de tal forma, que las altitudes ortométricas pueden obtenerse con una precisión muy alta. Este hecho es fundamental en la geodesia, pues podemos emplearlas como un sistema de alturas muy preciso, e introducirlas como dato de gran precisión en cualquier cálculo que requiera la altura de los puntos sobre la superficie de la Tierra. Concretamente, al retomar la fórmula presentada al principio de este apartado

$$h = H + N$$

si H puede ser obtenida con gran precisión siguiendo el itinerario de nivelación correspondiente, y h puede también ser obtenida con gran precisión, por ejemplo, empleando para ello un sistema de posicionamiento como GPS; resulta, como consecuencia, la determinación del geoide con una precisión tan alta como la que poseen las medidas de alturas elipsoidales y ortométricas.

Esta técnica es muy empleada en la actualidad para obtener las alturas del geoide sobre el elipsoide de referencia, en trabajos geodésicos de gran precisión, basta mencionar como ejemplo el proyecto ALGESTAR (ver Bürki and Marti (1990)), cuyo objetivo fue llevar a cabo la computación de un nuevo geoide para Suiza, comprobando al mismo tiempo la fiabilidad de las medidas GPS en una zona muy montañosa. Para ello, se obtuvieron las ondulaciones del geoide aplicando la ecuación

$$N = h - H$$

donde h fue obtenida a partir de observaciones GPS y H a partir de la computación de los números geopotenciales, siguiendo las líneas de nivelación de la Red Nacional de Nivelación que une los 40 vértices geodésicos de la Red Suiza de Triangulación. El resultado de este proyecto fue la obtención de las ondulaciones geoide para Suiza, con una precisión del orden de 10 cm.

BIBLIOGRAFÍA

Bürki B. and Marti U. (1990). *The Swiss Geoid Computation: A Status Report*. International Association of Geodesy Simposia. Symposia nº 106: Determination of the Geoid. Springer Verlag.

Cid R. y Ferrer S. (1997). *Geodesia Geométrica, Física y por Satélites*. Instituto Geográfico Nacional. Ministerio de Fomento.

Heiskanen W. A. y Moritz H. (1985). *Geodesia Física*. Instituto Geográfico Nacional e Instituto de Astronomía y Geodesia.

Leick A. (1995). *GPS satellite surveying*. John Wiley & Sons.

Torge W. (1991). *Geodesy, 2nd Edition*. Walter de Gruyter.

Vanicek P. and Krakiwsky E. (1986). *Geodesy : The Concepts*. Elsevier Science Publishers.

Geodesia Espacial. Aplicaciones

12. Geodesia espacial y cálculo gravimétrico del geoide

En la sección anterior indicamos que los receptores GPS permiten calcular las alturas elipsoidales, pero es necesario también obtener las alturas respecto al nivel del mar. Entonces, las alturas elipsoidales se deben convertir en alturas ortométricas restando la altura del geoide, para ello, es necesario computar las alturas del geoide (al menos con la misma precisión que la altura elipsoidal), dando la latitud y longitud del lugar. En este aspecto se centra una de las principales aplicaciones de la geodesia espacial, puesto que permite obtener la altura del geoide para cualquier punto de la Tierra, mediante un desarrollo armónico del potencial perturbador, como veremos en el siguiente apartado. Estas alturas del geoide se refieren, generalmente, al Sistema Geodésico de Referencia 1980 (GRS80).

No obstante, como veremos más adelante las alturas del geoide provenientes de un modelo geopotencial no son, en general, suficientemente precisas, por ello, es necesario determinar una corrección a las mismas. Esta corrección se determina a partir de las anomalías de la gravedad medidas sobre el terreno, para computar así, un modelo de geoide más preciso. En este sentido, otra importante aplicación de la geodesia espacial, está precisamente en este punto: la determinación de las anomalías de la gravedad asociadas a un modelo geopotencial. Debido a que las anomalías observadas sobre el terreno, están dadas en un área limitada y no pueden por tanto, utilizarse para resolver la longitud de onda larga del campo de gravedad terrestre, es necesario considerar un modelo geopotencial para la computación de tales longitudes de onda. Como veremos a continuación, la contribución de esta longitud de onda larga, corresponde a una aproximación suave del geoide, para la región bajo estudio.

Los resultados de la geodesia espacial y el cálculo gravimétrico de una altura del geoide muy precisa, para una región dada, tendrán una gran utilidad práctica directa e inmediata para toda la comunidad de usuarios de GPS (Kaula, 1987). Estos resultados permitirán incorporar a los algoritmos de cálculo de las alturas ortométricas, modelos más realísticos, conllevando los evidentes beneficios que reportará la mejora en la precisión de las alturas mencionadas, para la georeferenciación, fotogrametría o el control geométrico de obras. En suma, serán beneficiarios de tales resultados aquellos científicos y técnicos, interesados en una localización más precisa sobre el terreno. Puesto que, por una parte, usando medidas de posición con el sistema GPS, obtendrán una precisión suficiente en planimetría. Pero además, con la altura ortométrica hallada a partir de un modelo de geoide (cuya ondulación sea precisa), podrán realizar medidas precisas de alturas ortométricas sin nivelación (Schwarz *et al.*, 1987).

En relación con lo dicho en el párrafo anterior, algunas de las aplicaciones concretas en las que se puede usar directamente un modelo de geoide local son:

Fotogrametría. Tener un modelo de geoide, supone poder tomar puntos de apoyo sin necesidad de apoyarse en las redes geodésicas, que es lo que se hace actualmente para calibrar la altura elipsoidal (la obtenida con GPS), a altura ortométrica en la zona de trabajo (la que se necesita para la orientación absoluta del modelo estereoscópico). Para ello, suponemos que elipsoide y geoide son paralelos en esa zona, cosa que no es

rigurosamente cierta. La limitación del trabajo de apoyo en campo en Fotogrametría, ya sólo estaría limitada por la capacidad de los equipos empleados, y se elevaría el rendimiento de estos, puesto que no habría que inmovilizar equipos GPS para las calibraciones. Además de lo mencionado anteriormente, si se dispusiese de un marco de referencia común entre los puntos sobre el terreno y el centro de proyección de las cámaras aéreas, se simplificaría todavía más el trabajo de apoyo de campo.

Topografía. Disponer de un modelo de geoide supondría poder realizar topografía de obras con GPS, cosa que hasta ahora está limitada a control planimétrico. Con GPS el control geométrico se abarata pues el número de operarios mínimos necesarios se reduce a la mitad.

Caracterización agronómica y medioambiental. La posibilidad de determinar la altitud sobre el nivel del mar de forma rápida y eficaz, permitiría añadir la altitud como variable de estudio en los SIG (Sistemas de Información Geográfica), para su inclusión en los posteriores análisis con las demás variables geográficas.

Control hidrográfico, aforo de cuencas, y temas hidráulicos en general. Estos temas se verían especialmente beneficiados, ya que también se abarataría el coste de estas actuaciones al poder ser realizadas con GPS, que de no disponer de modelo de geoide no se podría realizar. El agua circula en el sentido de los potenciales gravitatorios decrecientes, y el sentido de los potenciales gravitatorios (altimetría obtenida por nivelación clásica) puede deducirse con el modelo de geoide.

13. Procedimiento operacional para el cálculo gravimétrico del geoide

Vista la importancia que tiene usar un modelo de geoide preciso, vamos a ver aquí cuál es el procedimiento operacional para obtenerlo. Para comenzar, hay que decir que las técnicas que vamos a describir a continuación, se han mostrado herramientas eficaces a la hora de indagar la ondulación del geoide, en distintas regiones de la Tierra (Kearsley, 1988; Forsberg and Kearsley, 1989; Torge *et al.*; 1989; Yun, 1994). Estas técnicas pretenden evitar el problema que conlleva la obtención de anomalías de la gravedad en un área limitada, puesto que con estos datos no podemos resolver las largas longitudes de onda del campo gravitatorio terrestre. Por ello, necesitamos considerar un modelo geopotencial, como es el modelo EGM96 (Lemoine *et al.*, 1996) en el cual se tiene en cuenta también el efecto de la marea sobre el geoide (Rapp *et al.*, 1991). Con él podemos obtener estas longitudes de onda larga. Así, en un paso previo de computación, obtendremos las anomalías aire-libre referidas al modelo geopotencial, computando la diferencia con las anomalías predichas por este modelo, estas diferencias serán usadas en un procedimiento de integración con la FFT (Schwarz *et al.*, 1990), para obtener finalmente, la ondulación del geoide N_b , la cual en un proceso de computación posterior, será añadida a la ondulación del geoide N_{GM} predicha por el modelo geopotencial considerado.

En consecuencia y con más detalle, el procedimiento de cálculo a seguir comienza por elegir un modelo geopotencial de la forma (Schwarz *et al.*, 1990):

$$T(P) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n P_{nm} (\cos \theta) [\delta J_{nm} \cos(m\lambda) + \delta K_{nm} \sin(m\lambda)] \quad (1)$$

donde P es un punto de coordenadas esféricas (r, θ, λ) , tal como está representado en la figura 5 de la sección anterior (apartado 10), siendo “a” es el semieje mayor del elipsoide de referencia. Las funciones asociadas de Legendre están denotadas por P_{nm} , siendo δJ_{nm} y δK_{nm} las diferencias de los coeficientes del desarrollo en armónicos esféricos de los potenciales W y U , definidos en el apartado 10 de la sección anterior (Heiskanen y Moritz, 1985, pág. 108). En la fórmula (1) el valor de “n” no sobrepasa generalmente el grado 360, es decir, se considera que el modelo geopotencial es dado hasta un grado $n = 360$ y orden $m = 360$, como máximo. Esto significa, obviamente, que la expresión (1) permitirá computar una aproximación suave del geoide. Por tanto, usamos el modelo geopotencial de la expresión (1) para obtener la contribución de onda larga, en las anomalías de la gravedad, mediante $(\theta = 90^\circ - \phi)$:

$$\Delta g_{GM} = \frac{1}{R} \sum_{n=2}^{n_{\max}} (n-1) \sum_{m=0}^n P_{nm}(\sin \phi) [\delta J_{nm} \cos(m\lambda) + \delta K_{nm} \sin(m\lambda)] \quad (2)$$

y para obtener dicha contribución, en la ondulación del geoide, mediante:

$$N_{GM} = \frac{1}{G} \sum_{n=2}^{n_{\max}} \sum_{m=0}^n P_{nm}(\sin \phi) [\delta J_{nm} \cos(m\lambda) + \delta K_{nm} \sin(m\lambda)] \quad (3)$$

habiendo considerado la hipótesis $a = r = R$, junto con un valor “G” igual a la gravedad media sobre la superficie de la Tierra. Debemos notar que el máximo grado de los coeficientes en este modelo, está determinado por el tamaño de la región local considerada, mediante la fórmula $b^\circ = 180 / n_{\max}$, en la cual $b^\circ \times b^\circ$ es el área en grados de la región local en la que tenemos las anomalías aire-libre observadas Δg_{FA} (Heiskanen y Moritz, 1985, pág. 26; Kearsley, 1988; Schwarz *et al.*, 1990).

Así, en un paso previo de computación, obtendremos las anomalías aire-libre referidas al modelo geopotencial Δg , computando la diferencia con las anomalías Δg_{GM} predichas por este modelo, es decir:

$$\Delta g = \Delta g_{FA} - \Delta g_{GM}$$

estas diferencias serán usadas en un procedimiento de integración con la FFT, para obtener la ondulación del geoide N_b , la cual en un proceso de computación posterior, será añadida a la ondulación del geoide predicha por (3), teniendo así:

$$N = N_b + N_{GM}$$

De esta forma obtenemos una solución gravimétrica del geoide, para la región local bajo estudio.

14. Componentes de la desviación de la vertical

En algunas aplicaciones prácticas es necesario pasar de un horizonte geodésico local a uno astronómico y viceversa. Este problema equivale a transformar las coordenadas

geodésicas (ϕ, λ) , en las coordenadas naturales (Φ, Λ) . En cualquier caso sabemos que (Heiskanen y Moritz, 1985, pág. 55 y 84):

$$\Phi = \xi + \phi, \quad \Lambda = \eta / \cos \phi + \lambda$$

donde (ϕ, λ) son conocidas para el punto P considerado, a través de la observación directa con medidas GPS. Entonces, para determinar (Φ, Λ) , es necesario conocer (ξ, η) puesto que determinamos sobre el terreno (ϕ, λ) . En este sentido, las fórmulas establecidas a este efecto en la sección anterior, apartado 10, para hallar las componentes de la desviación de la vertical, no se aplican directamente para este objetivo, pues bajo el punto de vista práctico, sería muy laborioso realizar una integración de las anomalías de la gravedad para toda la Tierra, tal como indica la fórmula de Vening Meinesz. Resulta más adecuado escribir las componentes de la vertical en la forma (Heiskanen y Moritz, 1985, pág. 112; Schwarz *et al.*, 1990):

$$\xi = -\frac{1}{GR} \frac{\partial T}{\partial \phi} \quad , \quad \eta = -\frac{1}{GR \cos \phi} \frac{\partial T}{\partial \lambda}$$

entonces, usando un modelo geopotencial, para escribir el potencial anómalo T en la forma dada por la ecuación (1), podemos poner:

$$\begin{aligned} \xi &= -\frac{1}{GR} \sum_{n=2}^{n_{\max}} \sum_{m=0}^n [\delta J_{nm} \cos(m\lambda) + \delta K_{nm} \sin(m\lambda)] \frac{dP_{nm}(\sin \phi)}{d\phi} \\ \eta &= -\frac{1}{GR \cos \phi} \sum_{n=2}^{n_{\max}} \sum_{m=0}^n m P_{nm}(\sin \phi) [-\delta J_{nm} \sin(m\lambda) + \delta K_{nm} \cos(m\lambda)] \end{aligned}$$

obteniendo también las componentes de la desviación de la vertical, a través de un modelo geopotencial, lo mismo que hacíamos para obtener la ondulación del geoide o las anomalías de la gravedad.

BIBLIOGRAFÍA

Forsberg R. and Kearsley A. H. W. (1989). *Precise Gravimetric Geoid Computations over Large Regions*. Developments in Four-Dimensional Geodesy. Lecture Notes in Earth Sciences Ser. : Vol. 29. Springer-Verlag.

Heiskanen W. A. y Moritz H. (1985). *Geodesia Física*. Instituto Geográfico Nacional e Instituto de Astronomía y Geodesia.

Kaula W. M. (1987). *The need for vertical control*. Surveying and Mapping, 47, pp. 57-64.

Kearsley A. H. W. (1988). *Tests on the recovery of the precise geoid height differences from gravimetry*. Journal of Geophysical Research, 93, pp. 6559-6570.

Lemoine F. G., Smith D. E. and Rapp R. H. (1996). *The Development of the NASA GSFC and DMA Joint Geopotential Model*. International Symposium on Gravity, Geoid and Marine Geodesy. Univ. of Tokyo.

Rapp R. H., Wang Y. M. and Pavlis N. K. (1991). *The Ohio State 1991 Geopotential and Sea Surface Topography Harmonic Coefficient Models*. Rep. of the Dep. of Geodetic Science and Surveying n. 410. The Ohio State University.

Schwarz K. P., Sideris M. G. and Forsberg R. (1987). *Orthometric Heights without Levelling*. Journal of Surveying Engineering, 113, pp. 28-40.

Schwarz K. P., Sideris M. G. and Forsberg R. (1990). *The use of FFT techniques in physical geodesy*. Geophys. J. Int., 100, pp. 485-514.

Torge W., Basic T., Denker H., Doliff J., Wenzel H.-G. (1989). *Long Range Geoid Control through the European GPS Traverse*. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe B, n° 290.

Yun H. S. (1994). *Determination of a Gravimetric Geoid Solution for South Korea*. International Association of Geodesy Simposia. Symposia n° 113: Gravity and Geoid. Springer-Verlag.

Bibliografía

BIBLIOGRAFÍA

Bomford G. (1971). *Geodesy*. Oxford University Press.

Bürki B. and Marti U. (1990). *The Swiss Geoid Computation: A Status Report*. International Association of Geodesy Simposia. Symposia nº 106: Determination of the Geoid. Springer Verlag.

Cid R. y Ferrer S. (1997). *Geodesia Geométrica, Física y por Satélites*. Instituto Geográfico Nacional. Ministerio de Fomento.

Forsberg R. and Kearsley A. H. W. (1989). *Precise Gravimetric Geoid Computations over Large Regions*. Developments in Four-Dimensional Geodesy. Lecture Notes in Earth Sciences Ser. : Vol. 29. Springer-Verlag.

Heiskanen W. A. y Moritz H. (1985). *Geodesia Física*. Instituto Geográfico Nacional e Instituto de Astronomía y Geodesia.

Kaula W. M. (1987). *The need for vertical control*. Surveying and Mapping, 47, pp. 57-64.

Kearsley A. H. W. (1988). *Tests on the recovery of the precise geoid height differences from gravimetry*. Journal of Geophysical Research, 93, pp. 6559-6570.

Leick A. (1995). *GPS satellite surveying*. John Wiley & Sons.

Lemoine F. G., Smith D. E. and Rapp R. H. (1996). *The Development of the NASA GSFC and DMA Joint Geopotential Model*. International Symposium on Gravity, Geoid and Marine Geodesy. Univ. of Tokyo.

Martín Asín F. (1983). *Geodesia y Cartografía Matemática*. Instituto Geográfico Nacional.

Rapp R. H., Wang Y. M. and Pavlis N. K. (1991). *The Ohio State 1991 Geopotential and Sea Surface Topography Harmonic Coefficient Models*. Rep. of the Dep. of Geodetic Science and Surveying n. 410. The Ohio State University.

Schwarz K. P., Sideris M. G. and Forsberg R. (1987). *Orthometric Heights without Levelling*. Journal of Surveying Engineering, 113, pp. 28-40.

Schwarz K. P., Sideris M. G. and Forsberg R. (1990). *The use of FFT techniques in physical geodesy*. Geophys. J. Int., 100, pp. 485-514.

Torge W. (1991). *Geodesy, 2nd Edition*. Walter de Gruyter.

Torge W., Basic T., Denker H., Doliff J., Wenzel H.-G. (1989). *Long Range Geoid Control through the European GPS Traverse*. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe B, nº 290.

Vanicek P. and Krakiwsky E. (1986). *Geodesy : The Concepts*. Elsevier Science Publishers.

Yun H. S. (1994). *Determination of a Gravimetric Geoid Solution for South Korea*. International Association of Geodesy Simposia. Symposia nº 113: Gravity and Geoid. Springer-Verlag.

Zakatov P. S. (1981). *Curso de Geodesia Superior*. MIR.